Übungen zur Funktionentheorie — Blatt 7

Aufgabe 1 Sei $D \subset \mathbf{C}$ beschränkt und $f_k : \bar{D} \to \mathbf{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, die in D holomorph sind. Zeigen Sie:

a) Ist D sternförmig, und konvergieren die f_k gleichmäßig auf ∂D, so auch auf ganz D gegen eine in D holomorphe Grenzfunktion f.

b) Zeigen Sie, dass alle Ableitungen von f_k gegen die Ableitungen von f konvergieren.

c) Was gilt für nicht sternförmige Gebiete D?
Hinweis: Was passiert, wenn $f_k \to 0$ gleichmäßig auf ∂D?

Aufgabe 2 Sei $D_0 := \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}$. Sei $\log := D_0 \to \mathbf{C}$ die Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z}$ mit $\log(1) = 0$. Dann nennt man $\log$ den *Hauptzweig des Logarithmus*.

a) Geben Sie eine explizite Formel für $\log$ an.

b) Zeigen Sie, dass $\log$ um ein beliebiges $z_0 \in H^+$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist, die Konvergenzradius $r = |z_0|$ hat.
Hinweis: Ist $\mathrm{Re}(z_0) > 0$ so ist dies klar. Für andere z_0 konstruieren Sie eine holomorphe Funktion l_{z_0}, die in einer Umgebung von z_0 mit $\log$ übereinstimmt und auf $B_{|z_0|}(z_0)$ definiert ist.

c) Skizzieren Sie die Situation für $z_0 \in H^+$ mit $0 < -\mathrm{Re}(z_0) < \mathrm{Im}(z_0)$.

d) Zeigen Sie, dass für z_0 wie in c) die Potenzreihe aus b) auf ihrem Konvergenzkreis eine Funktion definiert, die nicht mit $\log$ übereinstimmt.
Hinweis: Berechnen Sie eine explizite Formel für l_{z_0}.

Aufgabe 3 Sei $D \subset \mathbf{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Läßt sich $f' : D \setminus \{z_0\} \to \mathbf{C}$ zu einer holomorphen Funktion $g : D \to \mathbf{C}$ fortsetzen, so auch f und für die Fortsetzung $\tilde{f} : D \to \mathbf{C}$ gilt $\tilde{f}' = g$.

Aufgabe 4 Sei D ein Gebiet und $f : D \to \mathbf{C}$ eine holomorphe Funktion.

a) An der Stelle $z_0 \in D$ habe f eine Nullstelle erster Ordnung. Zeigen Sie, dass

$$\int_{K(z_0,r)} \frac{1}{f(\zeta)} d\zeta = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$

für kleine r.

b) Berechnen Sie eine entsprechende Darstellung von

$$\int_{K(z_0,r)} \frac{1}{f(\zeta)} d\zeta$$

falls f eine Nullstelle zweiter Ordnung in z_0 besitzt.

Abgabe: Donnerstag, den 18.06.2009 vor der Vorlesung